Teoría de la integral y de la medida, 2020-21

Hoja nº 7 *(medidas y σ-álgebras producto, medidas inducidas, el Teorema de Fubini)*

1.- Sea ν la medida definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ por medio de

$$\nu(A) = \operatorname{card}(A \cap \mathbb{Z}^2) \quad \text{para todo } A \subset \mathbb{R}^2.$$

Es decir, ν es la medida que "cuenta" el número de puntos de coordenadas enteras que hay en un conjunto. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Si ν_ϕ es la medida inducida por ν y ϕ en $\mathbb{R}$, calcular $\nu_\phi([1,e])$ y $\nu_\phi((e^2,e^3])$.

Solución. Por definición, $\nu_\phi([1,e]) = \nu(\{(x,y) : \phi(x,y) \in [1,e]\})$, es decir,

$$\begin{aligned}\nu_\phi([1,e]) &= \nu(\{(x,y) : 0 \le x^2+y^2 \le 1\})\\ &= \text{número de puntos de coordenadas enteras en el disco unidad} = 5.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\nu_\phi((e^2,e^3]) &= \nu(\{(x,y) : 2 < x^2+y^2 \le 3\}) = \nu(\{(x,y) : \sqrt{2} < \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{3}\})\\ &= \text{número de puntos de coordenadas enteras en el anillo exterior al disco cerrado de}\\ &\quad\ \text{radio } \sqrt{2} \text{ e interior al disco cerrado de radio } \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Este conjunto es el vacío (porque los puntos relevantes son $(0,0), (0,\pm1)$, $(\pm1,0)$, $(0,\pm2)$, $(\pm2,0)$, $(\pm1,\pm1)$ y todos están fuera de ese anillo). Por tanto $\nu_\phi((e^2,e^3]) = 0$.

2.- Si consideramos en $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ la medida de área de Lebesgue habitual, m, y si $\varphi(x_1,x_2) = x_1 + x_2$, o $\varphi(x_1,x_2) = |x_1 - x_2|$, demostrar que las medidas inducidas m_φ son medidas de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ y encontrar, en cada caso, la función de distribución.

Solución. Empezamos considerando el caso $\varphi(x_1,x_2) = x_1 + x_2$. Por definición, para cada conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$:

$$m_\varphi(A) = m(\{(x_1,x_2) \in [0,1] \times [0,1] : x_1 + x_2 \in A\}).$$

Como todos estos valores son finitos, deducimos que la medida inducida es de Lebesgue-Stieltjes y su función de distribución viene dada por:

$$F(t) = \begin{cases} -m_\varphi((t,0]) & \text{si } t < 0,\\ 0 & \text{si } t = 0,\\ m_\varphi((0,t]) & \text{si } t > 0.\end{cases}$$

Si $t < 0$, entonces $\{(x_1,x_2) \in [0,1] \times [0,1] : x_1 + x_2 \in (t,0]\} = \{(0,0)\}$, y por tanto $F(t) = 0$.

Si $t \in (0,1]$, entonces

$$\{(x_1,x_2) \in [0,1] \times [0,1] : x_1 + x_2 \in (0,t]\} = \{(x_1,x_2) : x_1 \in [0,t], x_2 \in [0,t-x_1]\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Finalmente, si $t > 2$,

$$\{(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1] : x_1 + x_2 \in (0, t]\} = [0,1] \times [0,1],$$

y concluimos que $F(t) = 1$.

En resumen,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{t^2}{2} & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ 1 - \frac{(2-t)^2}{2} & \text{si } 1 < t \leq 2, \\ 1 & \text{si } t > 2. \end{cases}$$

Veamos ahora el caso $\varphi(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. De nuevo por definición, se tiene para cada conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$:

$$m_\varphi(A) = m(\{(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1] : |x_1 - x_2| \in A\}).$$

Como todos estos valores son finitos, deducimos que la medida inducida es de Lebesgue-Stieltjes y su función de distribución viene dada por:

$$F(t) = \begin{cases} -m_\varphi((t, 0]) & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ m_\varphi((0, t]) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Ahora bien, si $t < 0$ el conjunto $\{(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1] : |x_1 - x_2| \in (t, 0]\}$ consta solo de la diagonal del cuadrado unidad y por tanto $F(t) = 0$. Esto último se puede ver fácilmente recubriendo la diagonal por la unión finita de rectángulos $V_n = (I_n^1 \times I_n^1) \cup \cdots \cup (I_n^{2^n} \times I_n^{2^n})$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \ldots, 2^n$, y haciendo $n \to \infty$. Por otro lado, si $0 < t < 1$, entonces el conjunto

$$\{(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1] : 0 < |x_1 - x_2| \leq t\}$$

es la región comprendida dentro del cuadrado unidad y entre las dos rectas de $\mathbb{R}^2$ dadas por $x_2 = x_1 - t$ y $x_2 = x_1 + t$. Esto nos da $F(t) = 1 - (1-t)^2 = 2t - t^2$. Finalmente, si $t \geq 1$ se tiene que el conjunto anterior es todo el cuadrado unidad (menos la diagonal) y por tanto $F(t) = 1$. Es decir,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 2t - t^2 & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

3.- Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $\mathrm{d}m = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ la medida de Lebesgue en X. Definimos $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de $\Phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Sea m_Φ la medida inducida por Φ y m en $\mathbb{R}$.

a) Calcular el valor de $m_\Phi([0,1])$.

b) Demostrar que m_Φ tiene la forma $\mathrm{d}m_\Phi(y) = W(y)\,\mathrm{d}y$ y encontrar $W(y)$ explícitamente.

Solución. a) Por definición, $m_\Phi([0,1]) = m(\Phi^{-1}([0,1]))$. Ahora bien,

$$\Phi^{-1}([0,1]) = \{(x, y) : \Phi(x, y) \in [0,1]\} = \{(x, y) : 0 \leq \ln(x^2 + y^2) \leq 1\} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e\}.$$

Luego $W(y) = \pi e^y$.

4.- Se considera sobre los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^2$ la medida de Lebesgue m y la función $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (0,1]$ dada por $\phi(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Si m_ϕ denota la medida inducida por ϕ y m sobre los Borel de $(0,1]$,

a) Probar que $m_\phi([a,b]) = \pi \log \frac{b}{a}$ si $0 < a < b \leq 1$.

b) Deducir que para todo $A \subset (0,1]$ Borel se tiene $m_\phi(A) = \pi \displaystyle\int_A \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solución. Por definición, $m_\phi(A) = m(\phi^{-1}(A))$ para todo A Borel de $(0,1]$. En particular, como

$$\phi^{-1}([a,b]) = \{(x,y) : a \leq e^{-(x^2+y^2)} \leq b\} = \{(x,y) : \log\frac{1}{b} \leq x^2+y^2 \leq \log\frac{1}{a}\}$$

es el anillo de radio interior $\sqrt{\log\frac{1}{b}}$ y radio exterior $\sqrt{\log\frac{1}{a}}$, se tiene

$$m_\phi([a,b]) = \pi\log\frac{1}{a} - \pi\log\frac{1}{b} = \pi\log\frac{b}{a}.$$

Llamando $\mathrm{d}\nu(t) = \pi\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ tenemos que tanto m_ϕ como $\mathrm{d}\nu$ son σ-finitas sobre los Borel de $(0,1]$ y coinciden en los intervalos de la forma $[a,b]$, puesto que

$$\mathrm{d}\nu([a,b]) = \pi\int_a^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \pi\log\frac{b}{a}.$$

Por lo tanto coinciden en la mínima σ-álgebra que los contiene. Esto prueba el tercer apartado, que también podemos obtener de forma analítica usando la propiedades de la medida inducida, el teorema del cambio de variables y el teorem a de Tonelli. En efecto, dada f medible y positiva

$$\begin{aligned}\int_{(0,1]} f\,\mathrm{d}m_\phi &= \int_{\mathbb{R}^2} f(e^{-(x^2+y^2)})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(e^{-r^2})r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_0^\infty f(e^{-r^2})r\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos hecho el cambio $t = e^{-r^2}$.

5.- Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ, ν las medidas de contar en $\mathbb{N}$. Probar que $\mathrm{d}(\mu\times\nu)$ es la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Si definimos

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ -1 & \text{si } m = n+1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

comprobar que $\displaystyle\int |f|\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \infty$ y que las integrales iteradas

Por otro lado, $\mathrm{d}(\mu\times\nu)(\{m\}\times\{n\}) = \mu(\{m\})\,\nu(\{n\}) = 1$ y $d(\mu\times\nu)(A) = \sum_{(m,n)\in A} 1 = \operatorname{card}(A)$. Esto nos dice que $\mathrm{d}(\mu\times\nu)$ es la medida de contar en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. En particular, cualquier función $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ es medible y

$$\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} f(m,n), \qquad \text{(si existe)}.$$

Si f es la función dada,

$$\int |f|\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} |f(m,n)| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{n+1} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \infty,$$

mientras que

$$\int\Big(\int f\,\mathrm{d}\mu\Big)\,\mathrm{d}\nu = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(f(n,n)+f(n+1,n)\big) = 0,$$

$$\int\Big(\int f\,\mathrm{d}\nu\Big)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n)\right) = f(1,1) + \sum_{m=2}^{\infty}\big(f(m,m-1)+f(m,m)\big) = f(1,1)+0 = 1.$$

6.- Sean $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ espacios de medida σ-finitos. Sea $f:X\to\mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ medible; $g:Y\to\mathbb{R}$, $\mathcal{N}$ medible y h definida mediante $h(x,y)=f(x)g(y)$.

a) Demostrar que h es $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ medible.
b) Demostrar que si $f\in L^1(\mu)$ y $g\in L^1(\nu)$ entonces $h\in L^1\mathrm{d}(\mu\times\nu)$ y además

$$\int_{X\times Y} h\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_Y g\,\mathrm{d}\nu\right).$$

Sugerencia: empezar con funciones simples.

Solución. a) Esta es la parte más delicada. Siguiendo la sugerencia, supongamos que f y g son ambas funciones simples; es decir,

$$f(x) = s(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k\,\chi_{A_k}(x) \quad \text{con } A_k\in\mathcal{M},$$

$$g(y) = t(y) = \sum_{j=1}^{J} d_j\,\chi_{B_j}(y) \quad \text{con } B_j\in\mathcal{N}.$$

Entonces $h(x,y)=s(x)t(y)$ es medible, porque

$$h(x,y) = s(x)t(y) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} c_k\,d_j\chi_{A_k}(x)\,\chi_{B_j}(y) = \sum_{k,j=1}^{K,J} c_k\,d_j\chi_{A_k\times B_j}(x,y),$$

7.- Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M}$-medible, $f \geq 0$, y sea $A_f = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

a) Probar que $A_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$).
Sugerencia: empezar con f simple.

b) Dada una medida μ en $(X, \mathcal{M})$ σ-finita, probar que $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ coincide con la medida producto $\pi = \mathrm{d}\mu \otimes dy$ del conjunto A_f.

Solución. a) Si empezamos con la función simple $f(x) = s(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k\,\chi_{B_k}(x)$, con $B_k \in \mathcal{M}$ disjuntos y $c_k > 0$, se tiene $A_s = \sum_{k=1}^{K} B_k \times [0, c_k)$ que claramente es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$-medible porque $B_k \times [0, c_k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}$. Además (con $\mathrm{d}y = \mathrm{d}m$ la medida usual de Lebesgue)

$$\mathrm{d}(\mu \times m)(A_s) = \sum_{k=1}^{K} \mu(B_k) c_k = \int_X s\,\mathrm{d}\mu.$$

Para la f dada, elegimos (*lema técnico*) una sucesión creciente de funciones simples positivas $\{s_n(x)\}_n$ con $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ para todo x. Entonces $A_f = \bigcup_{n\geq 1} A_{s_n}$, luego A_f es medible.

b) Por el TCM se cumple

$$\mathrm{d}(\mu \times \nu)(A_f) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\mu \times \nu)(A_{s_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

8.- Sea $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]}$ (álgebra de Borel en [0,1]), μ la **medida de Lebesgue** en $\mathcal{A}_1$, ν la **medida de contar** en $\mathcal{A}_2$. En el espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu \otimes \nu)$ se considera el conjunto $V = \{(x,y) : x = y\}$. Comprobar que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ y que $(\mu \times \nu)(V) = +\infty$. Sin embargo

$$\int_Y \left(\int_X \chi_V\,\mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\nu = 0, \qquad \int_X \left(\int_Y \chi_V\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = 1.$$

Esto muestra que la hipótesis de que las medidas sean σ-finitas no se puede quitar del enunciado del Teorema de Fubini.
Sugerencia: Si $V_n = (I_n^1 \times I_n^1) \cup \ldots \cup (I_n^{2^n} \times I_n^{2^n})$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \ldots 2^n$, entonces $V = \cap_1^\infty V_n$.

Solución. Puesto que cada $V_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ y V es la intersección numerable de ellos, se tiene que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ también.

Sea $\mu = m$ la medida de Lebesgue. Para cada $y \in [0,1]$ tenemos

$$\int_X \chi_V(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\{y\}} 1\,\mathrm{d}m = m(\{y\}) = 0, \text{ luego } \int_Y \left(\int_X \chi_V(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) = 0,$$

mientras que, si $x \in [0,1]$,

$$\int \chi_V(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \nu(\{x\}) = 1, \quad \text{luego} \quad \int \left(\int \chi_V(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int^1 1\,\mathrm{d}x = 1$$

Nótese que si $V \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i)$ con $A_i, B_i \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ se tiene que $(x,x) \in \cup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i)$ para cada $x \in [0,1]$. Por tanto $x \in \cup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B_i)$ de forma que $[0,1] \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B_i)$. Por la subaditividad y la monotonía,

$$1 \leq \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_i).$$

Por tanto, para algún k se tiene que $\mu(A_k \cap B_k) > 0$, y por consiguiente que $\mu(A_k) > 0$ y $\mu(B_k) > 0$. Esto implica que B_k tiene cardinalidad infinita, de manera que $\nu(B_k) = \infty$ y por consiguiente $(\mu \times \nu)(A_k \times B_k) = \mu(A_k)\nu(B_k) = \infty$. Así, la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i)$ es infinita y, puesto que los conjuntos A_i, B_i eran arbitrarios, $(\mu \times \nu)(V) = \infty$.

9.- Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}m)$, donde m es la medida de Lebesgue. Demostrar que $f(y-x)g(x)$ es integrable para casi todo y. Para estos valores de y, ponemos $h(y) = \int f(y-x)g(x)\,\mathrm{d}m(x)$. Se dice que h es *la convolución* de f y g y se escribe $h = f * g$. Demostrar que h es integrable y que $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Recordamos que $\|h\|_1 = \int |h|\,\mathrm{d}m$.

Solución. La función de dos variables $F(x,y) = f(y-x)$ es medible, porque para todo conjunto Δ medible en $\mathbb{R}$, el subconjunto $\{(x,y) : y - x \in \Delta\}$ de $\mathbb{R}^2$ es medible. Por tanto, las función $H(x,y) = f(y-x)g(x)$ y es medible. Aplicando el Teorema de Tonelli a la función positiva y medible $|H|$, vemos que

$$\iint |H(x,y)|\,\mathrm{d}m(x)\mathrm{d}m(y) = \int |g(x)| \Big(\int |f(y-x)|\,\mathrm{d}m(y) \Big)\,\mathrm{d}m(x) = \int |g|\,\mathrm{d}m \cdot \int |f|\,\mathrm{d}m.$$

Por tanto, H es integrable en $\mathbb{R}^2$. Por el Teorema de Fubini, $h(y) = \int f(y-x)g(x)\,\mathrm{d}m(x)$ está definida en c.t.p. Además, se obtiene

$$\begin{aligned} \|h\|_1 = \int |h(y)|\,\mathrm{d}m(y) &\leq \int \Big(\int |f(y-x)g(x)|\,\mathrm{d}m(x) \Big)\,\mathrm{d}m(y) \\ &= \int |g(x)| \Big(\int |f(y-x)|\,\mathrm{d}m(y) \Big)\,\mathrm{d}m(x) = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

10.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Comprobar que $\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ y que $\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el teorema de Fubini?

Solución. Se tiene que

$$\int_0^1 f(x,y)dy = \frac{1}{x^2} \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2} dy \overset{\frac{y}{x} = \tan u}{=} \frac{1}{x} \int_0^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{1 - \tan^2 u}{(1 + \tan^2 u)^2} \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \left(\cos^2 u - \sin^2 u\right) du = \frac{1}{x} \int_0^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \cos(2u)\, du$$

$1 + \cot^2(z/2) \qquad 1 + x^2$

como habíamos afirmado.

Por simetría obtenemos

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = -\int_0^1 f(y,x)\,dx = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4},$$

mientras que,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)\,dy = -\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Lo que falla aquí es que la función no es integrable (esto es una forma de demostrarlo).

11.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\ (x,y) \ne (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas (con respecto a la medida de Lebesgue) coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en $[-1,1]\times[-1,1]$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el Teorema de Fubini?

Solución. Las integrales iteradas valen 0 porque tanto f_x como f^y son integrables (continuas y acotadas), impares y el dominio de integración es simétrico. f no es integrable porque

$$\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \frac{1}{y(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = \infty.$$
